Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση στο χώρο, μπορώ να δημιουργήσω ένα διανυσματικό πεδίο, το πεδίο κλίσης, δηλαδή

$$f = f(x,y,z) \longmapsto \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

, π.χ αν $f(x,y,z) = xyz$, είναι $\nabla f(x,y,z) = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy$

Σε κάθε σημείο της τροχιάς ενός σώματος, αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα της ταχύτητάς του, τ' οποίο αντιστοιχεί σ' ένα διανυσματικό πεδίο.

Παρατήρηση: Κίνηση μπορεί να προκληθεί λόγω της ύπαρξης ενός πεδίου στο χώρο.

- Κίνηση υλικού σημείου (κίνηση του κέντρου μάζας του σώματος)

Όταν ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος, θεωρούμε τις συν/νες του ως συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή $(x,y,z) := (x(t), y(t), z(t))$. Τα σημεία αυτά, σχηματίζουν μια καμπύλη στο χώρο, που καλείται τροχιά κίνησης του σωματιδίου.
Το διάνυσμα $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας τη θέση του σωματιδίου, καλείται διάνυσμα θέσης του σωματιδίου.

Η παράγωγός του, $\underbrace{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}_{=\vec{u}(t)} = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$:= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, καλείται διάνυσμα ταχύτητα του σωματιδίου, κι είναι εφαπτόμενο στην τροχιά αυτού.

Το μέτρο $|\vec{u}(t)| = \left|\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$,

ονομάζεται ταχύτητα του σωματιδίου.

Η δεύτερη παράγωγος, $\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \dfrac{d\vec{u}(t)}{dt}$

$$= \left(\frac{d\dot{x}(t)}{dt}, \frac{d\dot{y}(t)}{dt}, \frac{d\dot{z}(t)}{dt}\right) := \left(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\right)$$

$:= \vec{\alpha}(t)$, καλείται διάνυσμα επιτάχυνσης του σωματιδίου.

Εφαρμογή: Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα για όλες τις χρονικές στιγμές της κίνησής του, τότε αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα.

//

Είναι: $\vec{u}(t) \perp \vec{\alpha}(t), \ \forall t \rightarrow \vec{u}(t) \cdot \vec{\alpha}(t) = 0$

$\rightarrow \vec{u}(t) \cdot \dfrac{d}{dt}\vec{u}(t) = 0 \rightarrow 2\vec{u}(t) \cdot \dfrac{d}{dt}\vec{u}(t) = 0$

$\rightarrow \dfrac{d}{dt}\big(\underbrace{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}_{|\vec{u}(t)|^2}\big) = 0 \rightarrow |\vec{u}(t)|^2 = c$

$\rightarrow |\vec{u}(t)| = \sqrt{c} =$ σταθερά

Παράδειγμα: Σωματίδιο ακολουθεί ελλειπτική τροχιά κίνησης στο επίπεδο yz, υπό τη μορφή $\left(\dfrac{y}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{2}\right)^2 = 1$. Να βρεθεί η θέση του όταν αυτό έχει μέγιστη ταχύτητα, καθώς και όταν έχει μέγιστη επιτάχυνση.

// Παραμετροποιώ ως εξής: $\begin{cases} \frac{y}{3} = \cos t \\ \frac{z}{2} = \sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2$

$\rightarrow \begin{cases} y = 3\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, οπότε η τροχιά

κίνησης του δίδεται ως $\vec{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Οπότε έχω ότι:

- $\bar{u}(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(t) = (-3\sin t, 2\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, με

$|\bar{u}(t)| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{5\sin^2 t + 4}$,

μέγιστη όταν $5\sin^2 t + 4$ μέγιστη, η οποία μεγιστοποιεί-
ται όταν $\sin^2 t$ μέγιστο, δηλαδή όταν $\sin^2 t = 1 \rightsquigarrow$
$t = \frac{\pi}{2}$ ή $t = \frac{3\pi}{2}$, οπότε η θέση του σωματιδίου θα είναι

$\bar{r}(\frac{\pi}{2}) = (0, 2)$ ή $\bar{r}(\frac{3\pi}{2}) = (0, -2)$

- $\bar{\alpha}(t) = \frac{d}{dt}\bar{u}(t) = (-3\cos t, -2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, με

$|\bar{\alpha}(t)| = \sqrt{5\cos^2 t + 4}$, μέγιστη όταν $\cos^2(t) = 1 \rightsquigarrow$
$t = 0$ ή $t = \pi$, οπότε η θέση του σωματιδίου θα είναι

$\bar{r}(0) = (3, 0)$ ή $\bar{r}(\pi) = (-3, 0)$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ καθορίζει τη φορά της κίνησης, με $\vec{u} = |\vec{u}|\,\hat{u}$

Με βάση τα φυσικά μεγέθη που ορίσαμε, μπορούμε να μελετήσουμε κι άλλα χαρακτηριστικά της κίνησης.

- Μήκος διαδρομής (μήκος τροχιάς - καμπύλης)

$$L = \int_C ds = \int_{t_1}^{t_2} |\bar{u}(t)|\,dt$$

- Μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\hat{T}_{(t)}(=\hat{u}) = \frac{\bar{u}(t)}{|\bar{u}(t)|}$$

- Καμπυλότητα

$$\kappa = \frac{1}{|\bar{u}(t)|}\left|\frac{d}{dt}\hat{T}(t)\right|$$

Ο τρόπος μεταβολής του μήκους της καμπύλης ως συνάρτηση του χρόνου, καθέλου προσημασμένη απόσταση

$$S = S(t) = \int_{t_0}^{t} |\bar{u}(t)|\,dt \;, \quad S \text{ μήκος τόξου καμπύλης}$$

Η μεταβλητή s του μήκους τόξου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως "αντικατάσταση" του χρόνου t, συνδέοντας το διάστημα που διανύθηκε στον χρόνο μέσω της ταχύτητας.

Είναι:

$$\hat{T}(s) \xlongequal[\text{Αλυσίδας}]{\text{Κανόνας}} \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$$

Ορίζουμε σε σημείο μη μηδενικής καμπυλότητας, το "πρωτεύον" μοναδιαίο κάθετο στην τροχιά διάνυσμα,

$$\hat{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\hat{T} = \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}$$

Εφαρμογή: $\hat{T} \perp \hat{N}$

// Είναι: $0 = \frac{d}{ds}|\hat{T}|^2 = \frac{d}{ds}(\hat{T}\cdot\hat{T}) = 2\hat{T}\cdot\frac{d}{ds}\hat{T}$

$= 2\hat{T}\cdot\frac{\hat{N}}{\kappa} = \frac{2}{\kappa}\hat{T}\cdot\hat{N}$, οπότε $\hat{T} \perp \hat{N}$.

Παράδειγμα: Αν $\bar{r}(t) = \cos(2t)\hat{i} + \sin(2t)\hat{j}$, να βρεθούν τα $\hat{T}$, $\hat{N}$ και κ.

// Είναι: $\hat{T} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{-2\sin(2t)\hat{i} + 2\cos(2t)\hat{j}}{2} = -\sin(2t)\hat{i} + \cos(2t)\hat{j}$

$\kappa = \frac{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}{|\bar{u}|} = 1$, $\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|} = -\cos(2t)\hat{i} - \sin(2t)\hat{j} = -\bar{r}(t)$.